Um einen Druckfehler auf S. 206 korrigierte Fassung!

9. Rationales Lernen und die Chaotische Uhr
Zur Kritik des Bayesianismus

Max Albert

Zusammenfassung [1]

Der Bayesianismus ist eine häufig vertretene Position in Wissenschaftstheorie, Entscheidungstheorie und Statistik. Nach bayesianischer Auffassung besteht rationales Lernen in der Zuweisung von willkürlichen subjektiven Wahrscheinlichkeiten an alternative Hypothesen und der Anpassung dieser Wahrscheinlichkeiten (gemäß dem Satz von Bayes) an die Erfahrung. Aus Hypothesen- ergeben sich Prognosewahrscheinlichkeiten, die als Entscheidungsgrundlage dienen. Ein Blick auf die Chaotische Uhr bringt jedoch die Schwächen des Bayesianismus zutage. Weder schützt er in irgendeinem Sinne vor Entscheidungsfehlern, noch kann er als eine induktive Logik gelten, die Denkfehler zu vermeiden hilft. Er leistet überhaupt keinen Beitrag zur Entscheidungsfindung, sondern verlangt zusätzlich zu einer völlig beliebigen Entscheidung eine Präferenzordnung über Alternativen, die durch diese Entscheidung definitiv irrelevant werden.

1. Das Induktionsproblem

Unter Induktion versteht man den Schluß von einer gegebenen Menge von Beobachtungsaussagen auf Vorhersagen oder auf Verallgemeinerungen, aus denen man wiederum Vorhersagen deduktiv ableiten kann.[2]

[1] Dieser Aufsatz basiert auf meinem Vortrag im Rahmen der Veranstaltungsreihe „Rationalität und Irrationalität in den Wissenschaften" des *European Institute for International Affairs* in Zusammenarbeit mit dem Institut für Philosophie der Universität Karlsruhe (TH) im April 2001. Ich danke den Teilnehmern an dieser Veranstaltung und darüber hinaus Hans Albert und Volker Gadenne für nützliche Hinweise und Diskussionen.

[2] Für die nachfolgenden Bemerkungen zur Geschichte des Induktionsproblems stütze ich mich auf Gillies (1988), Hacking (1990), Humphreys (1990) und Musgrave (1993, 155-170).

U. Arnswald, Hans-Peter Schütt (Hrsg.), *Rationalität und Irrationalität in den Wissenschaften,*
DOI 10.1007/978-3-531-93347-4_10

Um ein Beispiel zu verwenden, auf das ich weiter unten zurückkomme: Man findet eine Reihe von Smaragden, stellt fest, daß sie alle grün sind, und schließt, daß alle Smaragde grün sind. Aus dieser Verallgemeinerung folgt sowohl, daß der nächste gefundene Smaragd grün sein wird, als auch, daß die bisher gefundenen Smaragde auch morgen noch grün sein werden.

Bekanntlich hat David Hume argumentiert, daß solche induktiven Schlüsse jeder rationalen Grundlage entbehren. Während bei einem deduktiven Schluß die Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion garantiert, ist dies bei der Induktion nicht der Fall. Der Hang, induktiv zu verallgemeinern, ist nach Hume eine irrationale Gewohnheit, denn solche Verallgemeinerungen sind weder sicher wahr noch wahrscheinlicher als irgendwelche anderen Vermutungen.

Die durchaus übliche Auffassung — unter anderem auch von Isaac Newton vertreten —, daß zumindest die Wissenschaften rational *und* induktiv vorgehen, beinhaltet also, wenn Hume recht hat, einen Widerspruch. Das ist das Induktionsproblem. Eine Theorie, die zeigt, wie man rational aus der Erfahrung lernen kann, würde dieses Problem lösen.

Einer der frühesten Vorschläge dieser Art stammt von Thomas Bayes und wurde von Pierre Simon Laplace aufgegriffen. Der Bayessche Vorschlag ist ein direkter Angriff auf Hume, der ja meinte, die Verwendung von Wahrscheinlichkeiten könne das Induktionsproblem *nicht* lösen. Nach Bayes dagegen lernt man, indem man Hypothesen Wahrscheinlichkeiten zuschreibt — sogenannte *Apriori*-Wahrscheinlichkeiten —, die dann im Lichte der Erfahrung gemäß dem Bayesschen Theorem revidiert werden.

Bei Laplace war der Status der Apriori-Wahrscheinlichkeiten unklar. Er führte eine Regel ein, um diese Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Diese Regel — das Prinzip des unzureichenden Grundes — war uneindeutig; sie beruhte auf intuitiven Urteilen der Gleichwahrscheinlichkeit, die durch die Präsentation eines Problems nahe gelegt wurden. John Maynard Keynes und Rudolf Carnap versuchten etwa hundert Jahre nach der betreffenden Arbeit von Laplace, die Apriori-Wahrscheinlichkeiten eindeutig zu bestimmen, indem sie sie als Ausdruck der logischen Beziehung zwischen Aussagen auffassten (Theorie der logischen Wahrscheinlichkeit). Diese Versuche gelten heute weithin als gescheitert; es ist jedenfalls nicht gelungen, die Uneindeutigkeiten in dieser Theorie zu beseitigen.

Während die Theorie der logischen Wahrscheinlichkeit mit inhärenten Schwierigkeiten zu kämpfen hatte, wurden einflussreiche alternative Vorstellungen über rationales Lernen entwickelt, die ganz ohne Hypothesenwahrscheinlichkeiten auskamen.

Als Interpretation der Wahrscheinlichkeit hatte sich inzwischen die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit weitgehend durchgesetzt, nach der die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis eines Zufallsexperiments definiert ist als der Grenzwert der relativen Häufigkeit dieses Ergebnisses in einer unendlichen Reihe von Wiederholungen des Zufallsexperiments.[3] Aus Sicht der Häufigkeitstheorie erscheinen Hypothesenwahrscheinlichkeiten zwischen 0 und 1 unzulässig, weil sich kein Zufallsexperiment angeben läßt, in dem die Hypothese einmal wahr und einmal falsch ist.

Der Statistiker Ronald Aylmer Fisher und der Wissenschaftstheoretiker Karl Raimund Popper, die beide die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit vertraten,[4] lehnten die auf Bayes und Laplace zurückgehende Tradition scharf ab und schlugen ganz andere, einander sehr ähnliche Lösungen für das Problem des rationalen Lernens vor.

Fisher verallgemeinerte den χ^2-Test von Karl Pearson und den *t*-Test von William Sealy Gosset zur Theorie des Signifikanztests, die die statistische Theorie und Praxis revolutionierte. Popper entwickelte den Falsifikationismus, der eine ähnliche Wirkung auf die wissenschaftstheoretische Debatte hatte. Beide Lösungen beruhten mehr oder weniger explizit auf dem Grundgedanken, daß sorgfältig geprüfte und dabei unwiderlegt gebliebene (kurz: bewährte) Hypothesen rationalerweise vorläufig akzeptiert werden können.[5]

Es ist allerdings unklar, was rationale Akzeptanz genau bedeutet. Beide Autoren betonten, daß auch bewährte Hypothesen falsch sein könnten. In der reinen Wissenschaft kann man sich damit zufrieden geben, einfach eine von mehreren konkurrierenden Hypothesen als die

[3] Als Experiment gilt hier jede hypothetische Situation, in der ein zufälliges Ereignis auftritt. Es muß sich nicht um ein Experiment im engeren Sinne handeln, sondern es kann auch um reine Beobachtung ohne Manipulationen eines Experimentators gehen.

[4] Popper hat später eine andere Interpretation, nämlich die sogenannte Propensity-Interpretation, vorgeschlagen, die gewisse Probleme der Häufigkeitsinterpretation vermeidet, aber auch nicht als Interpretation von Hypothesenwahrscheinlichkeiten in Frage kommt.

[5] Vgl. Fisher 1990 u. Popper 1984. Für eine leicht lesbare Geschichte der Statistik s. Salsburg 2001. Für eine zugängliche historische Einführung in die Erkenntnistheorie s. Musgrave 1993. Für Versuche, die statistische Testtheorie mit der Wissenschaftstheorie Poppers zu verbinden, s. Gillies 1971; 1973 u. Albert 1992; 2002.

„derzeit beste" auszuzeichnen. Auf was stützt man sich aber, wenn man praktische Entscheidungen treffen muß? Soll man einfach so tun, als sei die derzeit beste Hypothese mit Sicherheit wahr? Dieses Problem wird manchmal als das pragmatische Induktionsproblem bezeichnet.[6] Es war von Bayes im Rahmen seiner Auffassung im Prinzip gelöst worden, aber eben unter Verwendung der problematischen Apriori-Wahrscheinlichkeiten.

Zwar wurde in den dreißiger und vierziger Jahren von Abraham Wald – ausgehend von Jerzy Neymans und Egon S. Pearsons[7] Kritik an der Fisherschen Testtheorie – eine statistische Entscheidungstheorie entwickelt, die sich auf Situationen anwenden ließ, in denen bekannt ist, daß eine Hypothese aus einer begrenzten Menge von Alternativen wahr ist. Diese Theorie hatte jedoch ebenfalls ein Problem.

Gegenstand der statistischen Entscheidungstheorie ist die Wahl zwischen verschiedenen *Strategien,* also vollständigen Plänen, die für jede gemäß den betrachteten Hypothesen mögliche zukünftige Situation festlegen, welche Handlungen auszuführen sind. Ein Beispiel wären Strategien der statistischen Qualitätskontrolle, die in Abhängigkeit vom Ergebnis der Untersuchung einer Stichprobe festlegen, ob eine Warensendung akzeptiert oder abgelehnt oder ob eine weitere Stichprobe untersucht wird.

Gemäß der statistischen Entscheidungstheorie sollte der Statistiker seine Strategie immer so wählen, als ob ein bösartiger Gegenspieler — „die Natur" — im Gegenzug gerade diejenige Hypothese als wahr „auswählen" würde, bei der die Strategie des Statistikers am schlechtesten funktioniert. Dieses Entscheidungskriterium — genannt Minimax-Kriterium für „Minimiere den maximalen erwarteten Schaden" — ersetzt die fragwürdigen Hypothesenwahrscheinlichkeiten durch die paranoid wirkende Annahme, es würde mit Sicherheit der schlechteste Fall eintreten.[8] Da diese Entscheidungstheorie jedoch keine gute Begründung für die Verwendung des extrem pessimistischen Minimax-Kriteriums enthielt, bot sie ein ideales Einfallstor für eine Theorie, die auf besser begründete Hypothesenwahrscheinlichkeiten zurückgriff.

---

6 Vgl. etwa Musgrave 1989, Abschnitt 4.
7 Pearsons 1967.
8 Zum Minimax-Kriterium vgl. Luce u. Raiffa 1957, 278-80. Die Interpretation des Kriteriums als Strategie gegen einen Gegenspieler „Natur" wurde durch die in den vierziger Jahren durch v. Neumann und Morgenstern entwickelte Spieltheorie nahegelegt.

Eine solche bessere Begründung war bereits bei Bayes zu finden. Seine Rechtfertigung für die Hypothesenwahrscheinlichkeiten wurde gegen Ende der zwanziger Jahre wiederentdeckt, noch vor der Formulierung der Neyman-Pearson-Theorie. Frank Plumpton Ramsey und Bruno de Finetti kritisierten unabhängig voneinander die Theorie der logischen Wahrscheinlichkeit. Sie entwickelten eine subjektivistische Variante der Theorie, im folgenden Bayesianismus genannt,[9] nach der die von Fisher und Popper abgelehnten Hypothesenwahrscheinlichkeiten „subjektive" Wahrscheinlichkeiten sind, also persönliche Grade des Glaubens, die wie auch bei Bayes eng mit Entscheidungen in Verbindung stehen.

Die einflussreichste Formulierung dieses Ansatzes stammt von dem Statistiker Leonard J. Savage.[10] Zu seiner Zeit war die statistische Entscheidungstheorie bereits weit entwickelt. Das erklärt vielleicht, warum sein Buch einen größeren unmittelbaren Einfluss hatte als die Arbeiten von Ramsay und de Finetti, denn eine gute Begründung für die Hypothesenwahrscheinlichkeiten war geeignet, das Problem der Wahl des Entscheidungskriterium in der statistischen Entscheidungstheorie zu lösen.

Nach Savage ergeben sich die Apriori-Wahrscheinlichkeiten aus einer vernünftigen Präferenzordnung auf der Menge denkbarer Strategie.[11] Wer alle denkbaren Strategien so ordnen kann, daß er von je zwei Strategien sagen kann, ob sie gleichgut sind oder welche von ihnen besser ist, und dabei gewisse vernünftige Regeln oder Axiome beachtet, der kann auch Hypothesenwahrscheinlichkeiten angeben.

Mit Savages Arbeit war die Grundlage für eine bayesianische Theorie rationalen Handelns formuliert, eine allgemeine Entscheidungstheorie, die sich auf Wissenschaftstheorie und Statistik anwenden läßt und eine einheitliche Lösung für das ursprüngliche und das pragmatische Induktionsproblem enthält. Im Folgenden will ich diese Lösung in ihren Grundzügen darstellen und dann kritisieren.[12]

---

9 Ebenfalls üblich ist die Bezeichnung SEU-Theorie oder subjektive Erwartungsnutzentheorie (SEU: *subjective expected utility*). Die Bezeichnung Bayesianismus wird gelegentlich in einem weiteren Sinne gebraucht und schließt dann auch die Theorie der logischen Wahrscheinlichkeit ein.

10 Savage 1954.

11 Savage spricht von Handlungen („acts") statt von Strategien; Handlungen in seinem Sinne können jedoch Strategien sein.

12 Vgl. auch Kiefer und Nyarko (1995) für eine knappe und übersichtliche Darstellung von Savages Ansatz. Eine ausführliche kritische Diskussion des Bayesianismus ist Earman (1992). Ein Lehrbuch der Wissenschaftstheorie auf bayesianischer Basis ist Howson und

2. Die Bayesianische Lösung

Nelson Goodman (1955) kritisierte die Idee, daß jede sorgfältig geprüfte und dabei unwiderlegt gebliebene Hypothese rationalerweise zur Prognose verwendet werden kann, anhand eines Beispiels, das gut geeignet ist, die bayesianische Lösung des Induktionsproblems zu erläutern.

Betrachten wir die Gesetzeshypothese „Alle Smaragde sind grün". Diese Hypothese ist gut geprüft und hat sich bewährt. Können wir sie daher rationalerweise für Prognosen heranziehen? Jedenfalls nicht nur deswegen, weil sie sorgfältig geprüft wurde. Zu der Hypothese gibt es nämlich eine Alternative, die implizit genauso gut geprüft wurde und ebenfalls nie widerlegt wurde, nämlich „Alle Smaragde sind blün", wobei das Wort blün heißen soll „bis heute grün und ab morgen blau".

Schlimmer noch. Wir können beliebig viele blünartige Hypothesen formulieren, die sich nur durch das Datum des Farbwechsels unterscheiden und von denen immer unendlich viele alle Tests überstehen, die auch von der Hypothese „Alle Smaragde sind grün" überstanden werden. Damit haben wir für jedes beliebige Datum zwei gleichermaßen geprüfte Hypothesen, von denen die eine behauptet, daß Smaragde zu diesem Datum grün sein werden, während die andere behauptet, daß sie nur bis zu diesem Datum grün sein werden, danach aber blau. Sind damit beide Prognosen gleichermaßen rational oder irrational?

Um dieses Beispiel hat es viele Diskussionen gegeben. Kann ein Wort wie „blün" in Gesetzeshypothesen vorkommen? Trifft dieses Gegenbeispiel Poppers Falsifikationismus oder nur naivere wissenschaftstheoretische Positionen? Alles das soll uns hier nicht interessieren. Wir nehmen das Beispiel nur als Ausgangspunkt, um den Bayesianismus zu erläutern.[13]

Nach bayesianischer Auffassung müssen allen Hypothesen subjektive Wahrscheinlichkeiten zugewiesen werden, die sich zu 1 summieren. Diese Wahrscheinlichkeiten reflektieren den persönlichen Grad des Glaubens an die betreffende Hypothese. Nehmen wir an, die Wahrscheinlichkeit für H_0 („Alle Smaragde sind grün") ist 0.01, während sich

Urbach (1993). Pratt, Raiffa und Schlaifer (1995) geben eine umfangreiche elementare Einführung in die Statistik aus bayesianischer Sicht. Hacking (2001) bietet eine ganz elementare Einführung in Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und Entscheidungstheorie unter besonderer Betonung der philosophischen Probleme.

[13] Die Erläuterung des Bayesianismus anhand von Goodmans Beispiel übernehme ich von Howson (1997a).

die Restwahrscheinlichkeit von 0.99 in beliebiger Weise auf die blün-artigen Hypothesen H_i, $i = 1, 2, \ldots$ verteilt, die alle ein anderes zukünftiges Datum für einen Farbwechsel von grün zu blau unterstellen.

Um das Problem etwas konkreter zu fassen, nehmen wir an, daß H_1 sagt, daß der Farbwechsel von heute auf morgen (Schlag Mitternacht) erfolgt; H_2 möge den Wechsel für übermorgen prognostizieren, usw. Die Wahrscheinlichkeit für Hypothese $H_i > 0$ sei $W(H_i) = 0.99 \cdot 2^{-i}$. Wegen $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 0.5 + 0.25 + \ldots = 1$ ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle Hypothesen gleich 1.

Nehmen wir jetzt an, wir sollten prognostizieren, ob ein bestimmter Smaragd morgen grün oder blau ist. Dazu summieren wir einfach die Wahrscheinlichkeit aller Hypothesen, die behaupten, daß er morgen grün ist. Nur H_1 behauptet, daß der Smaragd morgen schon blau sein wird. Also erhalten wir als Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Smaragd morgen grün ist, $1 - W(H_1) = 1 - 0.495 = 0.505$.

Nehmen wir nun an, daß sich die Prognose bestätigt: der Smaragd ist am nächsten Morgen immer noch grün. Dies widerlegt H_1. Wir erhalten $W(H_1 \mid B_1) = 0$, wobei B_1 unsere erste Beobachtung ist. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller unwiderlegten Hypothesen ist also jetzt $1 - W(H_1)$. Nach den Regeln des Bayesianischen Lernens[14] muß die Wahrscheinlichkeit der widerlegten Hypothese H_1 durch proportionales Anheben aller anderen Wahrscheinlichkeiten so auf die unwiderlegten Hypothesen verteilt werden, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller unwiderlegten Hypothesen wieder 1 ist. Das bedeutet: Wir müssen alle Hypothesenwahrscheinlichkeiten durch $1 - W(H_1)$ dividieren. Damit erhalten wir $W(H_0 \mid B_1) \approx 0.0198$; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle Smaragde grün sind, hat sich fast verdoppelt.

Sollte die Hypothese H_0 wahr sein, was wir einmal unterstellen wollen, so wird sie mit jedem Tag wahrscheinlicher werden, weil mit jedem Tag eine der Alternativhypothesen widerlegt wird. Dieses allgemeine Ergebnis ist völlig unabhängig davon, wie wir die Apriori-Wahrscheinlichkeiten wählen. Verschiedene Beobachter, die mit unterschiedlichen Apriori-Verteilungen beginnen, werden feststellen, daß ihre Ansichten (ausgedrückt durch die Hypothesenwahrscheinlichkeiten)

[14] Der Lernprozess ist hier besonders einfach, weil die Hypothesen selbst nicht probabilistisch sind. Bei Anwendungen auf statistische Probleme enthalten die Hypothesen selbst Wahrscheinlichkeiten, die dann auch von Bayesianern oft im Sinne der Häufigkeitstheorie oder seltener im Sinne der Propensity-Theorie interpretiert werden. Vgl. Howson u. Urbach 1993, Kap. 13.

sich einander annähern. Nach einer endlichen Zeit werden alle Beobachter mit ihren Ansichten beliebig nahe an der Wahrheit liegen.

Damit ergeben sich in unserem Beispiel aus dem Bayesianischen Lernen drei wichtige Konsequenzen: (a) Unterschiedliche Ansichten konvergieren unter dem Eindruck gemeinsamer Erfahrungen, und (b) zwar gegen ein gemeinsames Ergebnis, die Wahrheit, was hier auch einschließt, daß sich (c) die Prognosewahrscheinlichkeiten für zukünftige Ereignisse immer weiter annähern, so daß diese Wahrscheinlichkeiten für alle Beobachter nach endlich vielen Beobachtungen in einem beliebig engen Intervall liegen.

3. Die subjektive Erwartungsnutzentheorie

Die moderne Verteidigung des Bayesianismus greift allerdings nicht auf Konvergenzergebnisse zurück, denn diese Ergebnisse gelten, wie wir sehen werden, nur in einfachen Fällen. Stattdessen stützt sich der Bayesianismus auf die Idee, daß jemand, dessen Überzeugungen sich nicht mit Hilfe von Hypothesenwahrscheinlichkeiten darstellen lassen, gewisse Axiome rationalen Entscheidens verletzt. Es gibt verschiedene Varianten dieser Idee. Die folgende Darstellung orientiert sich an Savage,[15] allerdings nur in intuitiver Weise; dabei soll Goodmans Beispiel beibehalten werden.

Nehmen wir an, ein Freund vertraut Ihnen einen Smaragd an, damit Sie ihn für einen Tag aufbewahren. Sie wissen, daß Ihr Freund fest daran glaubt, daß Smaragde grün sind. Sie kämen also in Schwierigkeiten, wenn sie einen blauen Stein zurückgeben müssten: Wie sollten Sie erklären, was mit dem Smaragd passiert ist? Wir nehmen an, daß Sie wissen, daß Ihr Freund verärgert ist (v), wenn Sie ihm den Gefallen nicht tun oder wenn Sie einen blauen Stein zurückgeben, und zufrieden (z), wenn Sie den Smaragd nehmen und unverändert zurückgeben.

Die beiden Fälle „Freund verärgert“ (v) und „Freund zufrieden“ (z) sind die möglichen Konsequenzen Ihrer Handlungen (soweit diese Konsequenzen in Ihren Augen relevant sind). Zur Menge $C=\{v,z\}$ der möglichen Konsequenzen kommt die Menge S der möglichen Umweltzustände. Wir schränken die Betrachtung auf die Hypothesen „Alle Smaragde sind grün“ (H_0) und „Alle Smaragde sind blün (bis heute grün und ab morgen blau)“ (H_1) ein, weil der Smaragd am nächsten Tag

[15] 1954.

zurückgegeben wird; was danach passiert, ist unerheblich. Wir können die beiden möglichen Hypothesen mit verschiedenen Umweltzuständen identifizieren: $S = \{H_0, H_1\}$.

Zu Umweltzuständen und Konsequenzen treten Strategien oder — in diesem einfacheren Fall, bei dem keine Reaktionen auf zukünftige Zustände möglich sind — Handlungen hinzu. Die Art und Weise, wie Savage Handlungen darstellt, ist gewöhnungsbedürftig. Nach Savage ist eine Handlung eine Funktion, die jedem Umweltzustand eine Konsequenz zuordnet. Die Handlung „den Smaragd aufbewahren" ist also eine Funktion (im Folgenden: die Funktion a_3), die dem Umweltzustand H_0 die Konsequenz z und dem Umweltzustand H_1 die Konsequenz v zuordnet, weil bei Annahme des Smaragds Ihr Freund nur dann verärgert ist, wenn der Smaragd die Farbe wechselt.

Die Menge aller denkbaren Handlungen A ist nach Savage die Menge *aller* Funktionen $a_i: S \rightarrow C$. Dazu gehören insbesondere auch alle *konstanten Handlungen*, deren Konsequenz unter allen Umständen die gleiche ist. Der ungewohnte Aspekt ist, daß bei den meisten Entscheidungsproblemen zur Menge A Handlungen gehören, die gar nicht zur Verfügung stehen. In unserem Beispiel gibt es keine Handlung, die dazu führt, daß Ihr Freund immer zufrieden ist; trotzdem wird eine solche konstante Handlung (im Folgenden: die Funktion a_1) zunächst in die Analyse einbezogen, auch wenn sie natürlich nicht gewählt werden kann.

Umweltzustände, Handlungen und ihre Konsequenzen werden in Tabelle 1 dargestellt; die letzte Spalte (Erwartungsnutzen) ignorieren wir vorerst. Nur die Handlungen a_3 und a_4 stehen tatsächlich zur Verfügung. Die Handlung a_3 steht für „den Smaragd aufbewahren", weil dies die Handlung ist, die nur dann zu Zufriedenheit des Freundes (z) führt, wenn alle Smaragde grün sind und bleiben, H_0 also wahr ist. Die konstante Handlung a_4 dagegen steht für „den Smaragd zurückweisen", weil dies die Handlung ist, die immer zur Verärgerung des Freundes (v) führt, egal, ob H_0 wahr ist oder nicht.

Handlung	H_0 wahr	H_1 wahr	Erwartungsnutzen $EU(a_i)$
a_1	z	z	$W(H_0)u(z) + W(H_1)u(z) = u(z)$
a_2	v	z	$W(H_0)u(v) + W(H_1)u(z)$
a_3	z	v	$W(H_0)u(z) + W(H_1)u(v)$
a_4	v	v	$W(H_0)u(v) + W(H_1)u(v) = u(v)$

Tabelle 1: Entscheidungsproblem

Um Ihr Entscheidungsproblem im bayesianischen Sinne zu lösen, müssen Sie von jedem Paar von Handlungen feststellen, welche der beiden Handlungen besser ist oder ob beide gleich gut sind. Zur Rationalität gehört, daß Sie zu einem solchen Vergleich bei allen Paaren in der Lage sind (Vollständigkeit der Präferenzordnung) und dabei eine Reihung der Hypothesen finden können, so daß in dieser Reihe keine Hypothese schlechter ist als eine nachfolgende (Transitivität der Präferenzordnung). Eine vernünftige Reihung im Sinne von Savage wäre beispielsweise a_1Pa_2, a_2Pa_3, a_3Pa_4, wobei a_iPa_j bedeuten soll, daß a_i in Ihren Augen strikt besser ist als a_j. Wir schreiben a_iRa_j, wenn a_i nicht schlechter und möglicherweise besser ist als a_j, und a_iIa_j im Falle der Indifferenz.

Über Vollständigkeit und Transitivität stellt Savage weitere Anforderungen an eine Präferenzordnung, die im Folgenden aber nur intuitiv erläutert werden. Nehmen wir an, Sie bevorzugen eindeutig die konstante Handlung a_1 (mit Konsequenz z) vor der konstanten Handlung a_4 (mit Konsequenz v), also a_1Pa_4. Das bedeutet, daß Ihnen z lieber als v ist: Sie ziehen es vor, wenn Ihr Freund nicht verärgert, sondern zufrieden ist. Aus Transitivität und Vollständigkeit der Präferenzordnung folgt bei Betrachtung der konstanten Handlungen die Existenz einer Nutzenfunktion $u: C \rightarrow \Re$, die die Konsequenzen nach ihrer Vorzugswürdigkeit ordnet. Mit a_1Pa_4 muß $u(z) > u(v)$ gelten: Ihr Nutzen ist größer, wenn Ihr Freund zufrieden ist.

Gilt a_1Pa_4 oder $u(z) > u(v)$, was wir im Folgenden voraussetzen, sollten Sie auch a_1 für mindestens so gut halten wie a_2 oder a_3 (a_1Ra_2, a_1Ra_3), denn a_1 garantiert Ihnen das bessere Ergebnis in jedem Fall, während die anderen beiden Handlungen dies nicht tun.[16]

Wenn Sie a_1 für gleichgut halten wie a_2 (a_1Ia_2), dann geben Sie damit implizit zu erkennen, daß Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß H_0 wahr ist, mit 0 ansetzen. Es folgt, daß Sie auf jeden Fall a_3 für schlechter halten als a_1 und a_2 (a_1Pa_3, a_2Pa_3), aber zwischen a_3 und a_4 indifferent sind (a_3Ia_4).

Wenn Sie dagegen a_1 für besser halten als a_2 und a_3 (a_1Pa_2, a_1Pa_3), dann weisen Sie implizit sowohl H_0 als auch H_1 eine positive Wahrscheinlichkeit zu. Sie sollten dann a_4 für schlechter als a_2 und a_3 halten (a_2Pa_4, a_3Pa_4). Und daran, ob Sie a_2 oder a_3 bevorzugen, erkennt man, ob Sie H_1 oder H_0 für wahrscheinlicher halten. Wenn Sie etwa a_2 für besser halten als a_3 (a_2Pa_3), dann zeigen Sie, daß Sie H_1 für wahrscheinlicher halten als H_0.

[16] Für die folgenden Überlegungen empfiehlt es sich, Tabelle 1 heranzuziehen.

In diesem einfachen Beispiel ist die Apriori-Verteilung, die durch die Präferenzordnung enthüllt wird, nur in Extremfällen eindeutig festgelegt. So impliziert a_1Ia_2 $W(H_0) = 0$, a_2Ia_4 $W(H_0) = 1$ und a_2Ia_3 $W(H_0) = W(H_1) = 0.5$. Aus a_1Pa_2, a_2Pa_3, a_3Pa_4 läßt sich dagegen nur $1 > W(H_1) > W(H_0) > 0$ folgern.

Sind subjektive Wahrscheinlichkeiten und Nutzenwerte gegeben, läßt sich für jede Handlung a_i der erwartete Nutzen $EU(a_i)$ – Erwartungswert des Nutzens oder kurz *Erwartungsnutzen* – berechnen, indem man für jeden Umweltzustand den Nutzen der Konsequenz mit der Wahrscheinlichkeit des Umweltzustands multipliziert und diese Produkte über alle Umweltzustände aufsummiert (vgl. Tabelle 1). Savage (1954) hat bewiesen, daß man die Wahrscheinlichkeiten und die Nutzenfunktion immer so wählen kann, daß die Präferenzordnung über alle Handlungen durch die Erwartungsnutzenfunktion repräsentiert wird: Es gilt a_iPa_j genau dann, wenn $EU(a_i) > EU(a_j)$. So folgt aus a_1Pa_2, a_2Pa_3, a_3Pa_4 zunächst $1 > W(H_1) > W(H_0) > 0$ und $u(z)>u(v)$ und damit auch die Reihung $EU(a_1) > EU(a_2) > EU(a_3) > EU(a_4)$. Sind umgekehrt Apriori-Wahrscheinlichkeiten und Nutzenfunktion gegeben und ordnet ein Akteur die Handlungen nach ihrem Erwartungsnutzen, so erfüllt die so definierte Präferenzordnung die Savage-Axiome.

Es kommt also auf dasselbe hinaus, ob man (a) alle Handlungen vernünftig — d.h.: im Sinne der Savage-Axiome — nach ihrer Vorzugswürdigkeit ordnen kann und dann unter den verfügbaren Handlungen die beste wählt oder ob man (b) in der Lage ist, eine Apriori-Verteilung und eine Nutzenfunktion anzugeben, und auf dieser Grundlage die verfügbare Handlung mit dem höchsten Erwartungsnutzen wählt. Beides sind zwei verschiedene Seiten derselben Medaille.[17]

Bei gegebener Bewertung der Konsequenzen (gegebener Nutzenfunktion), wie wir sie im Folgenden unterstellen wollen, können wir die Apriori-Verteilung als Rationalisierung für die Handlungspräferenzen betrachten. Genau dann, wenn die Savage-Axiome verletzt sind, wenn also die Präferenzen gewissen vernünftigen Anforderungen, wie wir sie soeben implizit vorausgesetzt haben, nicht genügen – das wäre etwa der Fall, wenn a_1 besser als a_4, aber a_2 besser als a_1 ist –, gibt es keine Apriori-

[17] Bei Betrachtung von genügend (d.h.: überabzählbar unendlich) vielen Zuständen oder Hypothesen lassen sich eindeutige Wahrscheinlichkeiten für alle Hypothesen und eine bis auf die Wahl des Nullpunkts und der Einheit eindeutig bestimmte Nutzenfunktion zur Bewertung der Konsequenzen ableiten. Dieses Eindeutigkeitsresultat ist jedoch sekundär; in praktisch relevanten (d.h.: endlichen) Fällen sind unterschiedliche Nutzenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit derselben Präferenzordnung vereinbar.

Verteilung, die für die vorausgesetzte Bewertung der Konsequenzen die Handlungspräferenzen rationalisiert.

Ginge man einen Schritt weiter und betrachtete dynamische Probleme – bei denen Reaktionen auf neue Informationen möglich sind und es somit um die Wahl von Strategien geht –, würde sich zeigen, daß eine vernünftige Präferenzordnung über alle Strategien auch bayesianisches Lernen impliziert (Kiefer und Nyarko 1995). Der bayesianische Lernprozeß beruht also nicht auf zusätzlichen Annahmen. Er bietet nur eine weitere Möglichkeit, die präferierte Strategie zu beschreiben: es ist zum einen die Strategie mit dem maximalen Erwartungsnutzen; zum anderen ist es eine Strategie, deren Fortsetzung auch bei Auftreten neuer Informationen optimal bleibt, wenn man die Aprioriwahrscheinlichkeiten gemäß dem bayesianischen Lernprozeß an die neue Information anpaßt.[18]

4. Die Chaotische Uhr

Kommen wir zurück zum Induktionsproblem. Goodmans Blün-Beispiel ist viel zu einfach. Wenn jemand wirklich nicht weiß, wie sich Smaragde verhalten, und auf den Gedanken kommt, sie könnten die Farbe wechseln, dann kann er wohl kaum ausschließen, daß sie die Farbe mehrfach wechseln. Wenn wir Goodmans grün-blaue Verpackung beiseite lassen, dann sind wir bei einem klassischen Problem der Statistik. Wir haben eine Variable, die zwei Werte annehmen kann, Kopf oder Zahl, grün oder blau, 0 oder 1; die Aufgabe besteht darin, die zukünftigen Ausprägungen aufgrund vorliegender Beobachtungen möglichst gut vorherzusagen. Es läßt sich zeigen, daß sich alle praktisch relevanten Prognose-

[18] Hacking hat verschiedentlich (vgl. dazu Hacking 2001, 258f.) auf einen Schwachpunkt bei dieser Argumentation hingewiesen. Wenn man seinen Einwand im Kontext der Savage-Axiome interpretiert, würde er lauten: Bayesianisches Lernen folgt aus den Savage-Axiomen nur, wenn die Präferenzordnung auf der Menge der Strategien konstant ist; die Annahme konstanter Präferenzen ist aber kein Bestandteil der bayesianischen Rationalitätsdefinition. Das ist richtig, aber irrelevant. Eine Anwendung der Savage-Axiome auf das Problem der Strategiewahl schließt jedenfalls aus, daß ein rationaler Akteur bereits zum Zeitpunkt t plant, seine Wahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt $t + 1$ in anderer Weise anzupassen, als es die bayesianische Lernregel fordert. Der rationale Akteur kann bestenfalls zum Zeitpunkt $t + 1$ entdecken, daß sich seine Präferenzen geändert haben.

probleme letztlich in dieser abstrakten Form darstellen lassen; wir betrachten also das Problem der Prognose ganz allgemein.[19]

Wir wollen einen einfachen Mechanismus betrachten, der solche 0-1-Folgen erzeugen kann: die Chaotische Uhr (Abbildung 1).[20] Wir sprechen von 0-1-Folgen, aber wir könnten genauso gut „grün" statt 0 und „blau" statt 1 sagen. Man könnte sich vorstellen, daß ein Smaragd eine kleine Maschine enthält, die je nach dem, welche Ziffer die Chaotische Uhr produziert, die Farbe des Smaragds beeinflusst.

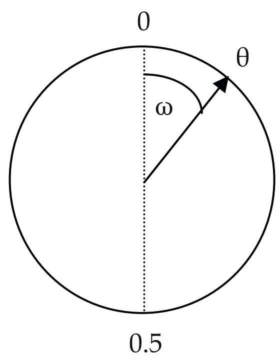

Abb. 1: Die Chaotische Uhr

Die Chaotische Uhr hat ein Zifferblatt, bei dem jedem Punkt eine reelle Zahl im halboffenen Intervall [0,1) entspricht. Steht der Zeiger senkrecht nach oben, zeigt er auf die 0; senkrecht nach unten ist 0.5, waagrecht nach rechts ist 0.25, waagrecht nach links 0.75, usw. Wenn der Zeiger sich kontinuierlich von der 0 im Uhrzeigersinn bewegen würde, dann würde er alle Zahlen von 0 bis 1 (mit Ausnahme der 1) durchlaufen. Der Zeiger bewegt sich jedoch nicht kontinuierlich, sondern er springt. Mit jedem Ticken der Uhr vervierfacht sich der eingezeichnete Winkel ω zwischen der senkrechten Linie und dem Zeiger.

[19] Wir müssen nur annehmen, daß wir ganze Blöcke von Nullen und Einsen vorhersagen müssen. Damit ist das Problem beliebiger Prognosen mit endlicher Präzision - die sich, heute selbstverständlich, in digitaler Form darstellen lassen - abgedeckt. Vgl. dazu Albert 2001.

[20] Die Chaotische Uhr ist Davies (1988) entnommen, wird dort allerdings nicht so genannt. Es handelt sich um eine Illustration der sogenannten *Baker-Map*-Dynamik; vgl. auch Ford 1983. Ich greife auf meine eigene Darstellung, Albert 1999 u. 2001, zurück. Meine Version der Chaotischen Uhr ist eine geringfügige Abwandlung des Originals, die ein technisches Problem umgeht.

Beobachten können wir den Zeiger allerdings nicht. Was wir beobachten, ist nur, ob der Zeiger in der ersten Hälfte des Zifferblatts ist, also im Intervall [0, 0.5) oder in der zweiten Hälfte, also im Intervall [0.5,1). Der ersten Hälfte des Zifferblatts entspricht die Beobachtung einer 0, der zweiten Hälfte die Beobachtung einer 1.

Der Witz der Chaotischen Uhr ist, daß sie in Abhängigkeit von der Anfangsposition des Zeigers jede beliebige 0-1-Folge erzeugen kann. Es handelt sich bei dieser Uhr um eine Illustration für einen einfachen chaotischen Prozess. Da jede Folge erzeugt werden kann, sagen Beobachtungen der Vergangenheit nichts über die Zukunft. Egal, was geschehen ist, es gibt eine Anfangsposition für den Zeiger, die mit den bisherigen Beobachtungen vereinbar ist und eine beliebige unendliche Fortsetzung der 0-1-Folge erzeugt.

Damit ist die Annahme, daß wir einer Chaotischen Uhr gegenüberstehen, gleichzusetzen mit vollkommener Unwissenheit. Jeder Anfangsposition für den Zeiger entspricht eine Hypothese. Wir können keine mögliche Zukunft ausschließen. Das ist die Ausgangsposition, die für das Induktionsproblem unterstellt wird, und an dieser Konstellation muß sich der Bayesianismus messen lassen, nicht an Goodmans einfachem Beispiel, in dem die Möglichkeiten schon ganz extrem beschränkt sind, nämlich auf einen einmaligen Wechsel von 0 zu 1.

Ein Bayesianer, der die von einer Chaotischen Uhr erzeugten 0-1-Folgen prognostizieren wollte, müßte von einer Apriori-Verteilung auf dem Intervall [0,1) ausgehen, beispielsweise von der Gleichverteilung, beschrieben durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\theta) = 1$, $\theta \in [0,1)$ mit θ als der anfänglichen Zeigerposition. Diese Apriori-Verteilung impliziert, daß die subjektive Wahrscheinlichkeit für eine 0 als nächste Beobachtung immer gleich 0.5 ist — gleichgültig, was bisher beobachtet wurde. Wählen wir eine beliebige stetige Dichtefunktion, so wird die subjektive Wahrscheinlichkeit für eine 0 sich langfristig der 0.5 nähern; kurzfristig dagegen kann die subjektive Wahrscheinlichkeit für 0 als nächster Beobachtung in Abhängigkeit von der gewählten stetigen Apriori-Verteilung und den bisherigen Beobachtungen beliebige Werte annehmen. Lassen wir aber beliebige Apriori-Verteilungen zu, erhalten wir ein drastisches Ergebnis.[21]

---

[21] Albert 1999, Theorem 1; 2001. Theorem 2 in Albert 1999 ist nicht korrekt; vgl. auch Albert 2001, 355, Fn. 21.

Wir nennen eine Funktion, die jeder endlichen 0-1-Folge eine Wahrscheinlichkeit dafür zuordnet, daß die Folge mit einer 0 fortgesetzt wird, eine Prognosefunktion. Damit kann jede denkbare Art und Weise, aus vergangenen Beobachtungen eine Wahrscheinlichkeit für das nächste Ereignis zu bestimmen, also jede Lernstrategie, durch eine Prognosefunktion dargestellt werden.

Es läßt sich nun zeigen, daß jede Prognosefunktion mit dem bayesianischen Lernen vereinbar ist. Egal, wie die Prognosefunktion aussieht, man kann eine Apriori-Verteilung finden, aus der man durch Anwendung des bayesianischen Lernens genau diese Prognosefunktion erhält. Jede beliebige Lernstrategie kann in der Form des bayesianischen Lernens dargestellt werden.

Damit kommt es keineswegs zu einer Annäherung der Prognosewahrscheinlichkeiten für verschiedene Beobachter. Das ist nur dann der Fall, wenn die Apriori-Verteilungen ähnlich genug sind. Bereits unter ganz einfachen Annahmen kommt eine solche Annäherung nicht zustande. Wenn ein Beobachter mit der Gleichverteilung als Apriori-Verteilung beginnt, dann wird er 0 und 1 immer für gleichwahrscheinlich ansehen. Ein anderer Beobachter könnte mit dem gleichen Recht die Wahrscheinlichkeit für 0 dauerhaft auf 0.3 setzen.[22] Damit hat man zwei ganz einfache Fälle, bei denen keinerlei Annäherung der Prognosewahrscheinlichkeiten auftritt. Dabei können sich die beiden Protagonisten zugute halten, daß sie völlig undogmatisch sind: beide stimmen darin überein, daß jede denkbare endliche Folge eine subjektive Wahrscheinlichkeit größer als 0 hat. Trotzdem werden sich ihre Prognosen niemals annähern.

Natürlich muß man nicht davon ausgehen, daß überall im Universum Chaotische Uhren lauern. Die Chaotische Uhr ist nur eine Art und Weise, vollkommene Unwissenheit darzustellen. Vollkommene Unwissenheit ist dasselbe wie vollkommenes Chaos, denn Chaos bedeutet nur, daß Beobachtungen der Vergangenheit keine Prognosen für die Zukunft ermöglichen. Dabei zeigt die Chaotische Uhr (oder allgemeiner: die Chaostheorie), daß ein solches Chaos ohne weiteres mit deterministischer Gesetzmäßigkeit vereinbar ist.

[22] Das erfordert eine Apriori-Verteilung, die nur in dem Sinne kompliziert ist, daß sie keine stetige Dichtefunktion hat; es macht jedoch keinen prinzipiellen Unterschied, auf welchen Wert man die Wahrscheinlichkeit für 0 fixiert.

Man könnte argumentieren, daß es unfair ist, völlige Unwissenheit zu unterstellen. Aber dies ist die Voraussetzung des Induktionsproblems. Das obige Resultat zeigt, daß die bayesianisch-rationale Lösung des Induktionsproblems identisch mit dem Humeschen Irrationalismus ist. Jede beliebige Überzeugung über zukünftige Entwicklungen ist nach bayesianischer Auffassung so rational wie irgendeine andere.

5. Folgerungen

Ist der Bayesianismus eine Theorie rationalen Lernens? Vielleicht sogar *die* Theorie rationalen Lernens? Zunächst muß man feststellen, daß die bayesianische Rationalität jedenfalls nicht den üblichen Vorstellungen davon entspricht, was Rationalität leistet.

Üblicherweise stellt man sich vor, daß Rationalität dabei hilft, Fehler zu vermeiden. Davon kann hier nicht die Rede sein. Aus bayesianischer Sicht gibt es keine Fehler. Wenn jede Erfahrung mit jeder Prognose vereinbar ist, dann ist jede Prognose rationalisierbar und kann damit nicht als fehlerhaft identifiziert werden. Ist jede Prognose rationalisierbar, ist jeder Handlungsplan rationalisierbar, und zwar gleichgültig, welche Ziele angestrebt werden.

Es wäre also völlig unsinnig, zu einem bayesianischen Experten zu gehen und zu sagen: Das sind meine Ziele (beschrieben durch eine Nutzenfunktion), das sind meine bisherigen Erfahrungen. Was soll ich tun? Oder zumindest: Was soll ich auf keinen Fall tun? Der Experte kann nur sagen: Tun Sie, was immer Sie wollen; nichts ist irrational. Bayesianer können keine Handlungsempfehlungen geben, sondern nur zeigen, wie man beliebige Handlungen rationalisieren kann. Der insbesondere in Ökonomie und Spieltheorie gelegentlich anzutreffenden Auffassung, die meisten Menschen könnten zwar abstrakte Probleme der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht richtig lösen, verhielten sich aber trotzdem so, *als ob* sie rational im bayesianischen Sinne wären, ist also uneingeschränkt zuzustimmen: Diese Auffassung ist vollkommen leer; sie ist wahr aufgrund der Definition von „rational im bayesianischen Sinne“.[23]

Es ist natürlich nicht immer problematisch, wenn eine Hypothese oder eine Empfehlung für sich betrachtet leer ist. Der Bayesianismus —

[23] Für eine allgemeine Diskussion von Als-ob-Interpretationen ökonomischer Theorien. Vgl. Albert 1996.

ob man ihn nun als positive Theorie des Verhaltens betrachtet oder als Beschreibung einer idealen Rationalität — kann zu einer gehaltvollen Theorie ergänzt werden, wenn man die Wahl der Apriori-Verteilung beschränken kann. Nur scheint mir das keine besonders viel versprechende Option zu sein. Der Bayesianismus ist das Produkt einer mit Laplace beginnenden Geschichte gescheiterter Versuche, solche Beschränkungen zu finden. Der Schwarze Peter liegt hier eindeutig bei den Bayesianern.

Als Alternative bietet es sich an, den Bayesianismus als eine Art Logik aufzufassen, die ähnlich wie die deduktive Logik zwar nicht sagt, was man tun sollte, aber vor Denkfehlern schützt.[24] Die Leistungen dieser Logik sind jedoch nur für jemanden interessant, der bereits der Auffassung ist, daß man Hypothesen Wahrscheinlichkeiten zuweisen sollte. Schließt man sich dieser Auffassung an, dann ist der Bayesianismus insgesamt vernünftig. Lehnt man sie ab, dann ist auch die spezielle Logik des Bayesianismus uninteressant.[25]

Damit bleibt als letztes Argument die Berufung auf die Axiome von Savage (oder Alternativen hierzu). Aber auch dieses Argument ist letztlich nicht überzeugend. Die Axiome sind durchaus sinnvoll, wenn man die Problemstellung akzeptiert, alle Handlungs- oder Strategiealternativen – unter Einschluss logisch möglicher Alternativen, die tatsächlich nicht zur Verfügung stehen – in eine vernünftige Reihung zu bringen. Aber warum sollte man eine solche Reihung finden wollen? An einem einfachen Beispiel läßt sich zeigen, daß der Bayesianismus mehr an Ordnung verlangt, als man sinnvollerweise brauchen kann.

Stellen Sie sich vor, Sie sollten in einem Restaurant von einer Speisekarte auswählen. Wenn Sie eine Rangordnung aller angebotenen Gerichte bilden, dann lösen Sie im Vorhinein das Problem, welches entsteht, wenn sich bei der Bestellung herausstellt, daß einige Speisen aus sind.

---

[24] Vgl. Howson 1997b.

[25] Es scheint mir offensichtlich, daß deduktive Logik und logische Konsistenz nützlich sind. Vgl. dazu Albert 2001, 360. Wer aus „Das Bier ist im Kühlschrank und Gläser stehen auf dem Tisch“ nicht folgern kann, daß das Bier im Kühlschrank ist, bleibt durstig. Und wer eine Erklärung für Inflation sucht, muß inkonsistente Theorien der Inflation verwerfen. Für die bayesianische Wahrscheinlichkeitslogik fehlt ein solches Argument. Howson (2001, 157) entgegnete auf meine entsprechende Bemerkung, logische Konsistenz sei im Gegensatz zu meiner Auffassung nicht notwendig für Wahrheit, da aus Widersprüchen beliebige Wahrheiten folgen. Das ist irrelevant; eine inkonsistente Theorie ist trotzdem falsch. Auch scheint Howson die Nutzlosigkeit der bayesianischen Logik zu bestreiten, ohne allerdings ihre Leistungen zu nennen. Miteinander unvereinbare Wahrscheinlichkeitszuweisungen an Hypothesen kann man jedenfalls vermeiden, indem man Hypothesenwahrscheinlichkeiten erst gar nicht verwendet.

Ihre erste Wahl war Tafelspitz; der Kellner sagt, daß Tafelspitz aus ist; also versuchen Sie es mit Ihrer zweiten Wahl, Wiener Schnitzel. Wenn das auch aus ist, kommt Ihre dritte Wahl zum Zuge. Es ist also nicht unsinnig, sich von vornherein Gedanken über die Reihung aller angebotenen Speisen zu machen.

Der Bayesianismus verlangt von Ihnen aber mehr. Sie sollen eine Präferenzordnung über alle Strategien bilden. Eine Strategie enthält bereits alle Reaktionen auf neue Informationen. Wenn Sie Ihre beste Strategie gefunden haben, sagt diese Strategie bereits, wie Sie auf die Information reagieren sollten, daß eine bestimmte Speise aus ist, daß der Fisch heute nicht so gut aussieht, etc. Damit gibt es keine denkbare Situation, in der auch nur die zweitbeste Strategie zum Zuge kommt, von den anderen ganz zu schweigen.

Der Bayesianismus fordert, alle denkbaren Strategien in eine vernünftige Ordnung zu bringen, obwohl alle Strategien außer der besten *per definitionem* irrelevant sind. Sie können eine beliebige Strategie als die beste wählen; hier gibt es keine Beschränkungen und auch keine Hilfe durch den bayesianischen Ansatz. Alles, was dieser Ansatz von Ihnen fordert, ist, die irrelevanten anderen Strategien auch noch zu ordnen. In diesem Sinne ist der bayesianische Ansatz schlimmer als nutzlos: nicht nur, daß er Ihnen nicht bei der Entscheidung hilft, er bürdet Ihnen auch noch überflüssige Arbeit auf.

Möglicherweise hat sich der Bayesianismus etwas überhoben, wenn er das Induktionsproblem angeht. Das ist jedenfalls die Auffassung von Ken Binmore.[26] Wenn man ihm folgt, ist der Bayesianismus dann brauchbar, wenn er auf eine überschaubare Problemstellung angewendet wird. Nach Binmore scheint auch Savage selbst ähnliche Auffassungen vertreten zu haben.

Wenn man nur eine begrenzte Menge von Hypothesen in Betracht zieht, dann ist es häufig so, daß der Bayesianismus tatsächlich gewisse Handlungen oder Strategien ausschließt. Konflikte zwischen dem Bayesianismus und der Neyman-Pearson-Theorie in der Statistik beruhen auf der Tatsache, daß die in statistischen Anwendungen herangezogene Menge an Hypothesen häufig sehr begrenzt ist.[27]

---

[26] 1993.

[27] Vgl. Lindley (1975, 13-75) und die Diskussion des Dominanzprinzips in: Albert (2001). Vgl. Howson u. Urbach (1993, Kap. 9) für eine bayesianische Kritik an der Neyman-Pearson-Theorie und Mayo (1996) für eine Weiterentwicklung der Neyman-Pearson-Theorie zu einer generellen Methodologie und eine entsprechende Kritik des Bayesianismus.

Sowohl die Neyman-Pearson-Theorie als auch der Bayesianismus können jedoch ein für statistische — und generell für wissenschaftliche — Fragestellungen bedeutsames Problem aus prinzipiellen Gründen nicht lösen. Beide Theorien können bei einer begrenzten Zahl probabilistischer Hypothesen keinen Hinweis darauf geben, ob die Gesamtmenge der betrachteten Hypothesen in Frage gestellt werden sollte, obwohl entsprechende statistische Tests wie der χ^2-Test praktisch häufig verwendet werden.[28]

Auch als eine ganz begrenzte Theorie rationalen Handelns ist der Bayesianismus also schwer vertretbar, weil er eine rationale Kritik an den bisher in Betracht gezogenen Hypothesen aufgrund neuer Beobachtungen nicht zulässt.

Literatur

Albert, Max (1992): Die Falsifikation statistischer Hypothesen. Journal for General Philosophy of Science, Vol. 23, 1-32.

Albert, Max (1996): ‚Unrealistische Annahmen' und empirische Prüfung. Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, Vol. 116, 451-86.

Albert, Max (1999): Bayesian learning when chaos looms large. Economics Letters, Vol. 65, 1-7.

Albert, Max (2001): Bayesian learning and expectations formation: anything goes., in: Corfield u. Williamson, 351-372.

Albert, Max (2002): Resolving Neyman's paradox. British Journal for the Philosophy of Science, Vol. 53, 69-76.

Binmore, Ken (1993): De-Bayesing game theory. In: Binmore, K., Kirman, A., Tani, P.: (eds.) Frontiers of Game Theory. Cambridge/MA., 321-339.

Blume, Lawrence E.; Easley, David (1995): What has the rational learning literature taught us? In: Kirman, A.; Salmon, M.: (eds.) Learning and Rationality in Economics. Oxford, 12-39.

Corfield, D. / Williamson, J. (eds.) (2001): Foundations of Bayesianism. Dordrecht/Boston (Kluwer Applied Logics Series).

Davies, Paul (1988): Prinzip Chaos. München.

Earman, John (1992): Bayes or Bust? Cambridge/MA.

Eatwell, J.; Milgate, M.; Newman, P. (eds.) (1990): The New Palgrave: Utility and Probability. New York.

Fisher, Ronald A. (1990): Statistical Methods. Experimental Design and Scientific Inference. Oxford.

Ford, Joseph (1983): How random is a coin toss?, in: Physics Today. April.

Gillies, Donald A. (1971): A falsifying rule for probability statements. In: British Journal for the Philosophy of Science. Vol. 22, 231-61.

[28] Albert 1992 u. 2002; Gillies 2001.

Gillies, Donald A. (1973): An Objective Theory of Probability. London.
Gillies, Donald A. (1988): Induction and probability. In: Parkinson, G.H.R. et al.: (eds.) An Encyclopedia of Philosophy. London, 179-204.
Gillies, Donald A. (2001): Bayesianism and the fixity of the theoretical framework., in: Corfield / Williamson, 363-379.
Goodman, Nelson (1955): Fact, Fiction, and Forecast. Indianapolis.
Hacking, Ian (1990): Probability., in: Eatwell et al., 163-177.
Hacking, Ian (2001): Probability and Inductive Logic. Cambridge.
Howson, Colin; Urbach, Peter (1993): Scientific Reasoning: The Bayesian Approach. 2. Aufl., La Salle/Ill.
Howson, Colin (1997a): Probability. Unv. Seminarunterlage f. d. Europ. Forum Alpbach.
Howson, Colin (1997b): Logic and probability., in: British Journal for the Philosophy of Science. Vol. 48, 517-531.
Howson, Colin (2001): The logic of Bayesian probability., in: Corfield / Williamson, 137-159.
Humphreys, Paul W. (1990): Induction., in: Eatwell et al., 116-120.
Kiefer, Nicholas M.; Nyarko, Yaw (1995): Savage-Bayesian models of economics., in: Kirman, A., Salmon, M.: (eds.) Learning and Rationality in Economics. Oxford, 40-62.
Lindley, Dennis V. (1972): Bayesian Statistics. A Review, Philadelphia.
Luce, R. Duncan; Raiffa, Howard (1957): Games and Decisions. New York.
Mayo, Deborah G. (1996): Error and the Growth of Experimental Knowledge. Chicago, London.
Neyman, Jerzy und Pearson, Egon S. (1967): Joint Statistical Papers. Cambridge.
Musgrave, Alan (1989): Saving science from scepticism., in: D'Agostino, F.; Jarvie, I. C.: (eds.) Freedom and Rationality. Dordrecht, 297-323.
Musgrave, Alan (1993): Alltagswissen, Wissenschaft und Skeptizismus. Tübingen.
Popper, Karl R. (1984): Die Logik der Forschung. 8. Aufl., Tübingen.
Pratt, J. W.; Raiffa, H.; Schlaifer, R. (1995): Introduction to Statistical Decision Theory. Cambridge/MA.
Salsburg, David (2001): The Lady Tasting Tea. How Statistics Revolutionized Science in the Twentieth Century. New York.
Savage, Leonard J. (1954): The Foundations of Statistics. New York.